

Abitur - Stochastik

Binomialverteilung & Hypothesentest
mit Julianna

Schritt-für-Schritt-Anleitung

Beispiele - Musterlösungen

Julianna Bończyk
M. Sc. Mathematik
Freiberufliche Nachhilfelehrerin
www.mathe-mit-julianna.de

© 2025 Julianna Bończyk
Alle Rechte vorbehalten.

Dieses Skript ist urheberrechtlich geschützt. Die Vervielfältigung, Weitergabe,
Veröffentlichung oder öffentliche Zugänglichmachung – auch auszugsweise – ist ohne
ausdrückliche schriftliche Zustimmung der Autorin nicht gestattet.

Inhaltsverzeichnis

1	Binomialverteilung	1
1.1	Bernoulli-Experiment	1
1.2	Bernoulli-Kette	2
1.3	Binomialverteilte Zufallsgröße	3

1 Binomialverteilung

1.1 Bernoulli-Experiment

Wann heißt ein Experiment ein **Bernoulli-Experiment**?

Bernoulli-Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es bei jeder Durchführung nur zwei mögliche Ausgänge gibt. Diese werden als **Erfolg** und **Misserfolg** bezeichnet.

Dabei bleibt die Erfolgswahrscheinlichkeit bei jeder Wiederholung gleich und wird mit p bezeichnet. Für den Misserfolg gilt entsprechend $q = 1 - p$.

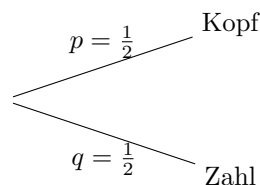
Was sind **Beispiele** für Bernoulli-Experimente?

1. Der **Wurf einer Münze** ist ein klassisches Bernoulli-Experiment. Wir legen beispielsweise fest, dass Kopf ein Erfolg ist und Zahl ein Misserfolg. Der Münzwurf erfüllt die Bedingungen eines Bernoulli-Experiments, da es genau zwei mögliche Ausgänge gibt und die Erfolgswahrscheinlichkeit bei jeder Durchführung gleich bleibt.

$$p = \frac{1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg lautet:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Der Münzwurf ist ein **Bernoulli-Experiment**, da es genau zwei mögliche Ereignisse (Kopf, Zahl) gibt und die Erfolgswahrscheinlichkeit p konstant ist.

2. Ein weiteres Beispiel für ein Bernoulli-Experiment ist das Ziehen einer roten Kugel aus einer Urne mit Zurücklegen, wobei wir das Ziehen einer roten Kugel als Erfolg festlegen.
3. Es soll geprüft werden, ob ein Bauteil funktioniert oder nicht.

1.2 Bernoulli-Kette

Wann heißt ein Zufallsexperiment eine **Bernoulli-Kette der Länge n** ?

Bernoulli-Kette

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Kette der Länge n** , wenn

- ein **Bernoulli-Experiment** n -mal durchgeführt wird und
- die Durchführungen **unabhängig** voneinander sind.

Die **Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg** bleibt bei jedem Versuch gleich.

Dabei wird typischerweise

- ein Ereignis als **Erfolg** definiert - bei unserem Münzwurf ist „Kopf“ ein Erfolg,
- das andere Ereignis als **Misserfolg** - in unserem Beispiel ist das „Zahl“.

Wie können wir entscheiden, ob eine **Bernoulli-Kette** vorliegt?

Beispiel: Betrachten wir einen **fairen Münzwurf**, der **8-mal hintereinander** durchgeführt wird. Wir versuchen mithilfe der obigen Erläuterung zu entscheiden, ob es sich um eine **Bernoulli-Kette** handelt:

- Bei jedem einzelnen der 8 Würfe sind **genau zwei Ereignisse** möglich:

Kopf oder Zahl.

→ Es handelt sich um ein **Bernoulli-Experiment**. ✓

- Da der Münzwurf 8-mal durchgeführt wird, ist hier

$$n = 8$$

→ Das Bernoulli-Experiment wird 8-mal durchgeführt. ✓

- Ob beim ersten Wurf „Kopf“ oder „Zahl“ gefallen ist, hat keinen Einfluss auf den zweiten Wurf. Außerdem beeinflusst das Ergebnis eines Wurfes **nicht** die Ergebnisse des nächsten Wurfes.

→ Die 8 Würfe sind **unabhängig** voneinander. ✓

- Die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ beträgt $p = 0.5$.

→ Die **Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg** bleibt bei jedem der 8 Versuche gleich $p = 0.5$. ✓

Alle Bedingungen einer **Bernoulli-Kette** sind erfüllt: Die einzelnen Würfe **beeinflussen sich nicht** gegenseitig, es gibt nur **zwei mögliche Ausgänge** und die **Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg** ändert sich nicht. Wir haben gezeigt, dass es sich beim 8-fachen Münzwurf um eine **Bernoulli-Kette** der Länge $n = 8$ handelt.

Wie erkenne ich, ob eine **Bernoulli-Kette** vorliegt?

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Kette der Länge n** , wenn

- ein **Bernoulli-Experiment** unter gleichen Bedingungen mehrfach durchgeführt wird,
- die einzelnen Versuche voneinander **unabhängig** sind und
- die **Erfolgswahrscheinlichkeit konstant** bleibt. Die Anzahl der Durchführungen wird mit n bezeichnet.

Was sind typische Beispiele?

- Werfen einer **Münze**
- Werfen eines **Würfels**
- Ziehen **mit** Zurücklegen

1.3 Binomialverteilte Zufallsgröße

Wann sprechen wir von einer **Binomialverteilung**?

Die Anzahl k der **Erfolge** innerhalb der n Versuche ist eine Zufallsgröße X , die mit Hilfe der **Binomialverteilung** beschrieben werden kann.

Binomialverteilung: Beschreibt die Zufallsvariable X bei

- einer **Bernoulli-Kette der Länge n** und
- einer **Wahrscheinlichkeit p** für einen **Erfolg**
- die **Anzahl k der Treffer**,

dann ist X **binomialverteilt** und es gilt

$$P(X = k) = B(n; p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (\text{Formel von Bernoulli}).$$

In der folgenden Übersicht sehen wir die gegebenen und gesuchten Parameter für die Binomialverteilung.

Gegeben:

- **Zufallsgröße** X , die binomialverteilt ist
- **Stichprobenumfang** n
- **Wahrscheinlichkeit** p für einen **Erfolg**
- **Anzahl** k der **Erfolge (Treffer)**

Gesucht: **Wahrscheinlichkeit** für k **Treffer**

Beispiel: Wir betrachten wieder unseren 8-fachen Münzwurf. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

A: Es fällt **genau** 5-mal Kopf.

Lösung: Wir haben gezeigt, dass der 8-fache Münzwurf eine Bernoulli-Kette der Länge 8 ist.

1. Schritt: Gegeben sind n , p und k . Wir achten darauf, die Parameter richtig einzusetzen:

$n = 8$: Stichprobenumfang
 $p = 0.5$: Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg
 $k = 5$: Anzahl der Treffer

Zufallsgröße X : Das ist die Anzahl der Würfe, bei denen Kopf fällt. Die Zufallsvariable X ist **binomialverteilt**.

2. Schritt: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 5-mal Kopf fällt. Wir möchten also $P(A)$ bestimmen. Wir setzen in die Formel von Bernoulli ein:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{Formel von Bernoulli}).$$

Mit $k = 5$, $n=8$ und $p = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$P(A) = P(X = 5) = \binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 56 \cdot \frac{1}{256} = \frac{7}{32}.$$

Abi-Hinweis

Es ist vor der Anwendung der Binomialverteilung immer zu prüfen, ob das Zufallsexperiment als **Bernoulli-Kette** modelliert werden darf.

Ein Antwortsatz kann wie folgt lauten:

- Die Versuche sind **unabhängig**,
- es gibt genau zwei Ausgänge - **Erfolg, Misserfolg** ,
- die **Erfolgswahrscheinlichkeit** bleibt **konstant**.

Daher liegt eine **Bernoulli-Kette** vor.

Eine vollständige **Lösung** kann wie folgt aussehen:

Es sei X die Zufallsgröße, die die Anzahl der Erfolge bei **acht Münzwürfen** angibt. Alle Bedingungen einer Bernoulli-Kette der Länge $n = 8$ sind erfüllt: Die einzelnen Würfe beeinflussen sich nicht gegenseitig, es gibt nur zwei mögliche Ausgänge und die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ für einen Erfolg ändert sich nicht. So können wir die Binomialverteilung direkt anwenden:

$$X \sim B(8; 0.5).$$

Gesucht ist Wahrscheinlichkeit dafür, dass **genau fünfmal Kopf** fällt:

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 56 \cdot \frac{1}{256} = \frac{7}{32} \\ &\approx 0.21875. \end{aligned}$$

Antwortsatz: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei acht Münzwürfen genau fünfmal Kopf fällt, beträgt somit 21.9 %.

Die Wahrscheinlichkeit wird mit dem Taschenrechner mit dem Befehl `binompdf` berechnet. Der Befehl für die Berechnung von $P(X = k)$ lautet:

`binompdf(n;p;k)`
Hinweis:

Ab hier starten die ausführlichen Beispiele und Lösungen. Die vollständige Version des Skripts gibt es auf:

www.mathe-mit-julianna.de